Bemerkungen:

Klammern: $\cancel{a \wedge b \vee c}$ $\quad (a\wedge b)\vee c \;;\; a \wedge (b \vee c)$

$ab+c = (ab)+c \neq a(b+c)$

$\neg$ stärkere Bindungskraft als $\vee$, $\wedge$: $\neg a \vee b$

$\vee$, $\wedge$ stärker als $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ $\quad a \wedge b \rightarrow b$

$$\forall x : (x \geq 0 \rightarrow \exists y : y^2 = x)$$

$\forall x \in X : P(x)$: Abkürzung für $\forall x : (x \in X \longrightarrow P(x))$

$\exists x \in X : P(x)$: " " $\exists x : (x \in X \wedge P(x))$

$\exists! x \in X : P(x)$: " " $\exists x : (x \in X \wedge P(x) \wedge \forall y : (y \in X \wedge P(y) \longrightarrow y = x))$

Def.: Φ Menge von Formeln, σ Formel

$\boxed{\Phi \vdash \sigma}$ falls $\exists$ Beweis von σ aus Φ existiert.

Def.: Eine Theorie ist eine Menge von Formeln, die unter $\vdash$ abgeschlossen ist.

Def.: Die von Φ erzeugte Theorie ist $\{\sigma \mid \Phi \vdash \sigma\}$.

Def.: Φ heißt inkonsistent, falls $\exists \sigma : \Phi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$. Widerspruch.
Sonst heißt Φ konsistent.

Prop.: Φ inkonsistent $\Rightarrow \forall \tau : \Phi \vdash \tau$.

Beweisskizze: Wir haben σ mit $\Phi \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$.

$$\left.\begin{array}{l} L6 : \vdash \sigma \rightarrow (\sigma \vee \tau) \\ \Phi \vdash \sigma \end{array}\right\} \overset{MP}{\Longrightarrow} \Phi \vdash \sigma \vee \tau$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi \vdash \neg\sigma \rightarrow \tau \\ \Phi \vdash \neg\sigma \end{array}\right\} \overset{MP}{\Longrightarrow} \Phi \vdash \tau .$$

qed.

Def.: Die Theorie eines Modells M (Interpretation) ist die Menge aller Formeln σ mit $M \models \sigma$.

Bem.: Die ist immer konsistent.

Bew.: $M \not\models \sigma \wedge \neg\sigma$

Korrektheitssatz & Vollständigkeitssatz sagen:

$$\boxed{\forall \sigma \text{ Formel}: \; T \vdash \sigma \iff \forall \text{ Modell } M \text{ von } T \text{ gilt } M \models \sigma.}$$